Logaritmos

Los logaritmos solo son preguntas sobre el valor del exponente. Empecemos con unos ejercicios de introducción para familiarizarnos con ellos.

1. Resuelve factorizando

a) $2^{\square}=2$
b) $2^{\square}=4$
c) $2^{\square}=1$
d) $2^{\square}=16$
e) $2^{\square}=8$
f) $3^{\square}=9$
g) $3^{\square}=27$
h) $3^{\square}=1$
i) $3^{\square}=3$
j) $3^{\square}=81$
k) $4^{\square}=16$
l) $4^{\square}=1$
m) $4^{\square}=4$
n) $5^{\square}=25$
o) $5^{\square}=1$
p) $5^{\square}=5$
q) $6^{\square}=36$
r) $6^{\square}=6$
s) $6^{\square}=1$
t) $7^{\square}=49$
u) $7^{\square}=7$
v) $8^{\square}=8$
w) $8^{\square}=64$
x) $8^{\square}=1$
y) $10^{\square}=100$
z) $10^{\square}=1$
aa) $10^{\square}=10$

Este ejercicio que acabamos de hacer es lo que expresan los logaritmos. Por ejemplo, para $2^{\square}=8$ significa ¿A qué número elevo 2 para que me de 8? Esto es lo mismo que escribir $\log_2 8=3$. Una vez entendamos que la función logaritmo es como una pregunta, será más fácil resolver los ejercicios siguientes. Practiquemos un poco.

2. Resuelve sabiendo que

$$\boxed{2^3=8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8=3}$$

a) $\log_2 8 = \square$
b) $\log_2 2 = \square$
c) $\log_2 1 = \square$
d) $\log_2 4 = \square$
e) $\log_2 16 = \square$
f) $\log_3 3 = \square$
g) $\log_3 27 = \square$
h) $\log_3 9 = \square$
i) $\log_3 81 = \square$
j) $\log_3 1 = \square$
k) $\log_4 4 = \square$
l) $\log_4 1 = \square$
m) $\log_4 16 = \square$
n) $\log_5 5 = \square$
o) $\log_5 25 = \square$
p) $\log_5 1 = \square$
q) $\log_6 36 = \square$
r) $\log_6 1 = \square$
s) $\log_6 6 = \square$
t) $\log_7 7 = \square$
u) $\log_7 49 = \square$
v) $\log_8 1 = \square$
w) $\log_8 8 = \square$
x) $\log_8 64 = \square$
y) $\log_{10} 10 = \square$
z) $\log_{10} 100 = \square$
aa) $\log_{10} 1 = \square$

Las reglas de los exponentes se van a ir reflejando en los logaritmos constantemente. Empecemos por la regla de que el producto de dos potencias con la misma base es igual a la suma de los exponentes, por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{l}10^{\square}=2\\ 10^{\triangle}=5\end{array}\right\} \Longrightarrow 10^{\square}\cdot 10^{\triangle}=2\cdot 5 \iff 10^{\square+\triangle}=2\cdot 5 \iff 10^{\lozenge}=2\cdot 5$$

Este ejemplo nos lleva a la siguiente regla

3. Resuelve sabiendo que

$$\boxed{\log_{10}(2)+\log_{10}(5)=\log_{10}(2\cdot 5)}$$

a) $\log_{10}(2)+\log_{10}(5)=\log_{10}(\square\cdot\square)=\log_{10}(\square\square)=\square$
b) $\log_{10}(20)+\log_{10}(5)=\log_{10}(\square\square\cdot\square)=\log_{10}(\square\square\square)=\square$
c) $\log_{10}(2)+\log_{10}(50)=\log_{10}(\square\cdot\square\square)=\log_{10}(\square\square\square)=\square$
d) $\log_{10}(4)+\log_{10}(25)=\log_{10}(\square\cdot\square\square)=\log_{10}(\square\square\square)=\square$
e) $\log_6(2)+\log_6(3)=\log_6(\square\cdot\square)=\log_6(\square)=\square$

f) $\log_6(12) + \log_6(3) = \log_6(\square\square \cdot \square) = \log_6(\square\square) = \square$
g) $\log_6(2) + \log_6(18) = \log_6(\square \cdot \square\square) = \log_6(\square\square) = \square$
h) $\log_8(2) + \log_8(4) = \log_6(\square \cdot \square) = \log_8(\square) = \square$
i) $\log_8(16) + \log_8(4) = \log_6(\square\square \cdot \square) = \log_8(\square\square) = \square$
j) $\log_8(2) + \log_8(32) = \log_8(\square \cdot \square\square) = \log_8(\square\square) = \square$

Como sumar muchas veces el mismo número es igual que multiplicar (2+2+2+2+2 = 2·5) y multiplicar muchas veces el mismo número es elevar a una potencia (2·2·2·2·2 = 2^5) Ocurrirá igual en los logaritmos, es decir,

$$\log_{32}(2) + \log_{32}(2) + \log_{32}(2) + \log_{32}(2) + \log_{32}(2) = 5 \cdot \log_{32}(2)$$

A la vez que aplicando la regla anterior de que la suma de los logaritmos es igual al logaritmo del producto, también es igual a

$$\log_{32}(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = \log_{32}(2^5)$$

Esta es la explicación para la siguiente regla, y por tanto, el siguiente ejercicio

4. Resuelve sabiendo que

$$\boxed{\log_2(2^5) = 5 \cdot \log_2(2)}$$

Con los siguientes pasos

$$\log_{12}(12^5) = 5 \cdot \log_{12}(12) = 5 \cdot 1 = 5$$

a) $\log_{23}(23^7) = \square \cdot \log_{\square\square}(\square\square) = \square \cdot 1 = \square$
b) $\log_{15}(15^9) = \square \cdot \log_{\square\square}(\square\square) = \square \cdot 1 = \square$
c) $\log_{42}(42^{11}) = \square\square \cdot \log_{\square\square}(\square\square) = \square\square \cdot 1 = \square\square$
d) $\log_{287}(287^{19}) = \square\square \cdot \log_{\square\square\square}(\square\square\square) = \square\square \cdot 1 = \square\square$
e) $\log_{58}(58^{24}) = \square\square \cdot \log_{\square\square}(\square\square) = \square\square \cdot 1 = \square\square$
f) $\log_{75}(75^{247}) = \square\square\square \cdot \log_{\square\square}(\square\square) = \square\square\square \cdot 1 = \square\square\square$

Y ahora aplicando la regla al revés, con estos pasos:

$$3\log_8(2) = \log_8(2^3) = \log_8(8) = 1$$

g) $2\log_4(2) = \log_{\square}(\square^{\square}) = \log_{\square}(\square) = \square$
h) $4\log_{16}(2) = \log_{\square\square}(\square^{\square}) = \log_{\square\square}(\square) = \square$
i) $2\log_{16}(4) = \log_{\square\square}(\square^{\square}) = \log_{\square\square}(\square\square) = \square$
j) $4\log_4(2) = \log_{\square}(\square^{\square}) = \log_{\square}(\square\square) = \square$
k) $2\log_9(3) = \log_{\square}(\square^{\square}) = \log_{\square}(\square) = \square$
l) $4\log_9(3) = \log_{\square}(\square^{\square}) = \log_{\square}(\square\square) = \square$

Con estas dos reglas de logaritmos estamos preparados para resolver las primeras ecuaciones, entendiendo que el logaritmo es una función que se porta bien (*biyectiva*) y por tanto

$$\cancel{\log_2}(\square) = \cancel{\log_2}(\triangle) \iff \square = \triangle$$

5. Calcula el valor de la x, en tu libreta

Utiliza los pasos de los ejercicios anteriores, hasta terminar con estos últimos pasos:

$$\boxed{\cancel{\log_2}(x) = \cancel{\log_2}(5) \iff x = 5}$$

a) $\log_3(x) = \log_3(8)$
b) $\log_5(x) = \log_5(7)$
c) $\log_{20}(11) = \log_{20}(x)$
d) $\log_7(2x) = \log_7(8)$
e) $\log_2(5x) = \log_2(35)$
f) $\log_8(18) = \log_8(6x)$

g) $\log_5(x) = 3\log_5(2)$
h) $2\log_4(5) = \log_4(x)$
i) $\log_7(3x) = 2\log_7(6)$

j) $\log_3(5) + \log_3(7) = \log_3(x)$
k) $\log_2(8) + \log_2(x) = \log_2(16)$
l) $\log_6(x) + \log_6(3) = \log_6(12)$
m) $2\log_4(3) + 3\log_4(2) = \log_4(x)$
n) $3\log_9(3) + 2\log_9(3) = \log_9(x)$
o) $4\log_{11}(2) + \log_{11}(x) = 2\log_{11}(3)$

El siguiente tipo de ecuaciones que interesa estudiar son aquellas donde hay un número suelto (o varios), por ejemplo:

$$\log_2(x) = 3$$

En estos casos tenemos dos opciones para resolverlos. La más sencilla de entender es probablemente la técnica del 1 ninja, es decir, multiplicar por un 1 que nos hemos inventado, para convertirlo en un logaritmo de la base que tiene la ecuación, veamos como:

$$\boxed{\begin{aligned} \log_2(x) &= 3 \\ \log_2(x) &= 3\cdot 1 \\ \log_2(x) &= 3\cdot\log_2(2) \\ \cancel{\log_2}(x) &= \cancel{\log_2}(2^3) \\ x &= 2^3 \\ x &= 8 \end{aligned}}$$

6. Resuelve usando el 1 ninja, en tu libreta.

a) $\log_2(x) = 1$
b) $\log_2(x) = 2$
c) $\log_2(x) = 4$
d) $\log_2(x) = 0$
e) $\log_3(x) = 3$
f) $\log_3(x) = 2$
g) $\log_3(x) = 1$
h) $\log_3(x) = 4$
i) $\log_3(x) = 0$
j) $\log_4(x) = 2$
k) $\log_4(x) = 1$
l) $\log_4(x) = 0$

Pero la forma más corta, y además la más elegante porque demuestra mayor conocimiento de las funciones, es aplicar la función inversa al logaritmo, esto es,

$$\cancel{2^{\log_2}}{}^{(x)} = x$$

Y teniendo en cuenta que dos cosas que son iguales, harán que si les añades la misma base también serán iguales:

$$\square = \triangle \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\square} = 2^{\triangle}$$

Es importante que las bases coincidas. De forma que la resolución de este ejemplo quedaría solo con estos pasos

$$\boxed{\begin{aligned} \log_2(x) &= 3 \\ \cancel{2^{\log_2}}{}^{(x)} &= 2^3 \\ x &= 8 \end{aligned}}$$

7. Resuelve dejándolo en forma de potencia, usando la función inversa, en tu libreta.

a) $\log_5(x) = 0$
b) $\log_5(x) = 2$
c) $\log_5(x) = 1$
d) $\log_6(x) = 2$
e) $\log_6(x) = 0$
f) $\log_6(x) = 1$
g) $\log_7(x) = 1$
h) $\log_7(x) = 2$
i) $\log_7(x) = 5$
j) $\log_7(x) = 4$
k) $\log_9(x) = 14$
l) $\log_{13}(x) = 9$
m) $\log_{16}(x) = 2$
n) $\log_{18}(x) = 8$
o) $\log_{21}(x) = 73$
p) $\log_{34}(x) = 57$
q) $\log_{57}(x) = 89$
r) $\log_{127}(x) = 278$
s) $\log_{45}(x) = 74$
t) $\log_{854}(x) = 247$
u) $\log_{357}(x) = 95$

Hasta aquí se ha trabajado sobre las ideas básicas de los logaritmos, podríamos verlo como la primera etapa.

La siguiente parte introducimos los signos y las dos bases más usadas, la 10 y la $\mathbb{e}$=2,718281… ≈ 2,7, la historia de los logaritmos, y de cómo se escoge el número $\mathbb{e}$ es interesante y la dejo en el apéndice para los curiosos.

En las publicaciones internacionales se escribe logaritmo sin la base para referirse a la base $\mathbb{e}$, es decir, $\log(x)=\log_{\mathbb{e}}(x)$, sin embargo, en España el estándar es otro. Nosotros usamos las palabras ln para referirnos a Logaritmo Neperiano (por su inventor, John Napier 1614), o mejor dicho si se comprende la historia, Logaritmo Natural, de forma que

$$\ln(x)=\log_{\mathbb{e}}(x)$$

Dejando así la notación de logaritmo sin subíndice para el logaritmo en base 10, también llamado logaritmo decimal

$$\log(x)=\log_{10}(x)$$

Insistir en la diferencia de notación entre España y los demás países sobre todo es por si se consultan textos en inglés que hoy en día por internet es algo muy fácil, que no se dé la confusión.

Entonces, para cogerle el truco, vamos a resolver como en los ejercicios anteriores, diversos ejemplos pero ahora usando estas dos bases. Los pasos son los mismos, solo que ahora se usa $\mathbb{e}$ o la base 10 en vez de los números que usábamos antes.

8. Repasa los ejercicios anteriores para acostumbrarte con la base $\mathbb{e}$ y la base 10

a) $10^{\square}=10$
b) $\mathbb{e}^{\square}=\mathbb{e}^2$
c) $10^{\square}=100$
d) $10^{\square}=1000$
e) $\mathbb{e}^{\square}=\mathbb{e}$
f) $10^{\square}=1$

g) $\mathbb{e}^{\square}=\mathbb{e}^5$
h) $\mathbb{e}^{\square}=1$
i) $\log 10 = \square$
j) $\ln \mathbb{e} = \square$
k) $\log 100 = \square$
l) $\ln \mathbb{e}^2 = \square$

m) $\log 1 = \square$
n) $\ln 1 = \square$
o) $\log 1000 = \square$
p) $\ln \mathbb{e}^5 = \square$
q) $\ln \mathbb{e}^{15} = \square\square$
r) $\ln \mathbb{e}^{23} = \square\square$

s) $\log(2)+\log(5)=\log(\square\cdot\square)=\log(\square\square)=\square$
t) $\log(4)+\log(25)=\log(\square\cdot\square\square)=\log(\square\square\square)=\square$
u) $\log(20)+\log(5)=\log(\square\square\cdot\square)=\log(\square\square\square)=\square$
v) $\log(2)+\log(50)=\log(\square\cdot\square\square)=\log(\square\square\square)=\square$

w) $\ln(x)=\ln(9)$
x) $\log(x)=\log(6)$
y) $\ln(15)=\ln(x)$

z) $\log(3x)=\log(12)$
aa) $\log(7x)=\log(28)$
bb) $\ln(24)=\ln(6x)$

cc) $\ln(x)=2\ln(3)$
dd) $3\log(2)=\log(x)$
ee) $\ln(2x)=2\ln(4)$

ff) $\log(5)+\log(7)=\log(x)$
gg) $\ln(8)+\ln(x)=\ln(16)$
hh) $\log(x)+\log(3)=\log(12)$

ii) $2\log(3)+3\log(2)=\log(x)$
jj) $3\ln(3)+2\ln(3)=\ln(x)$
kk) $4\ln(2)+\ln(x)=2\ln(3)$

ll) $\log(x)=2$
mm) $\ln(x)=1$
nn) $\log(x)=1$
oo) $\ln(x)=0$

pp) $\ln(x)=2$
qq) $\log(x)=3$
rr) $\ln(x)=5$
ss) $\log(x)=4$

tt) $\ln(x)=7$
uu) $\ln(x)=3$
vv) $\ln(x)=12$
ww) $\ln(x)=29$

La última regla nueva que nos queda por aprender es la de cambios de base. Esta fórmula se utiliza cuando la base no nos da el resultado directamente. La ecuación del cambio de base se puede demostrar de la siguiente forma:

$$\log_a(x)=\log_a(x)$$

$$\log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_a(x)$$
$$\log_b(x)\cdot\log_a(b) = \log_a(x)$$
$$\log_b(x)=\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Entonces la fórmula que tenemos que aprendernos es solo la última:

$$\boxed{\log_b(x)=\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}}$$

Que suelo decir para memorizar "lo que está abajo (la base) se va abajo (denominador). Y lo que está arriba (número del logaritmo) se queda arriba (numerador)". La base a se escoge en función de los factores de a y x, que para que se resuelva sin decimales deberían de ser potencia del mismo número.

Un ejemplo de su uso puede ser este ejemplo:

$$\log_8(4)=\frac{\log_2(4)}{\log_2(8)}=\frac{\log_2(2^2)}{\log_2(2^3)}=\frac{2}{3}$$

9. Usando el cambio de base, resuelve estos logaritmos

a) $\log_4(2)$
b) $\log_4(8)$
c) $\log_8(2)$
d) $\log_9(3)$
e) $\log_{27}(3)$
f) $\log_{25}(5)$
g) $\log_{36}(6)$
h) $\log_{49}(7)$
i) $\log_{64}(8)$
j) $\log_{64}(2)$
k) $\log_{64}(4)$
l) $\log_{81}(9)$
m) $\log_{100}(10)$
n) $\log_{1000}(100)$
o) $\log_{1000}(10)$

Estas son todas las reglas, ahora hay que empezar a utilizarlas con números negativos y fracciones. Recordamos estas dos reglas del tema de potencias:

$$7^{-1}=\frac{1}{7} \qquad 5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

Que de forma general, para números más grandes podemos poner tres ejemplos:

$$7^{-3}=\frac{1}{7^3} \qquad 5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5}^{\,3} \qquad 3^{-\frac{2}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{3}^{\,2}}$$

Para refrescar la memoria practica con el siguiente ejercicio:

10. Expresa en forma de potencia

a) $\frac{1}{7}=7^{\square\square}$
b) $\frac{1}{2}=2^{\square\square}$
c) $\frac{1}{5}=5^{\square\square}$
d) $\frac{1}{17}=17^{\square\square}$
e) $\frac{1}{43}=43^{\square\square}$
f) $\frac{1}{\mathbb{e}}=\mathbb{e}^{\square\square}$
g) $\frac{1}{5\mathbb{e}}=(5\mathbb{e})^{\square\square}$
h) $\frac{1}{7^2}=7^{\square\square}$
i) $\frac{1}{4^3}=4^{\square\square}$
j) $\frac{1}{2^6}=2^{\square\square}$
k) $\frac{1}{93^{17}}=93^{\square\square\square}$
l) $\frac{1}{\mathbb{e}^6}=\mathbb{e}^{\square\square}$

m) $\sqrt{6}=6^{\square/\square}$
n) $\sqrt{10}=10^{\square/\square}$
o) $\sqrt[3]{2}=2^{\square/\square}$
p) $\sqrt{10^3}=10^{\square/\square}$
q) $\sqrt{\mathbb{e}^5}=\mathbb{e}^{\square/\square}$
r) $\sqrt[3]{4}=4^{\square/\square}$
s) $\sqrt[5]{11^3}=11^{\square/\square}$
t) $\sqrt[7]{2^4}=2^{\square/\square}$
u) $\sqrt[3]{\mathbb{e}^5}=\mathbb{e}^{\square/\square}$

v) $\frac{1}{\sqrt{5}}=5^{\square\frac{\square}{\square}}$
w) $\frac{1}{\sqrt{3}}=3^{\square\frac{\square}{\square}}$
x) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=2^{\square\frac{\square}{\square}}$
y) $\frac{1}{\sqrt[5]{7}^{\,2}}=7^{\square\frac{\square}{\square}}$
z) $\frac{1}{\sqrt[9]{11}^{\,7}}=11^{\square\frac{\square}{\square}}$
aa) $\frac{1}{\sqrt[5]{\mathbb{e}}^{\,2}}=\mathbb{e}^{\square\frac{\square}{\square}}$
bb) $\sqrt[7]{3^{-4}}=3^{\square\frac{\square}{\square}}$
cc) $\sqrt[4]{5^{-3}}=5^{\square\frac{\square}{\square}}$
dd) $\sqrt{2^{-3}}=2^{\square\frac{\square}{\square}}$
ee) $\sqrt[5]{\mathbb{e}^{-7}}=\mathbb{e}^{\square\frac{\square}{\square}}$

Ahora tenemos que aprender a expresar estas operaciones con logaritmos. Tenemos que convertirlo en exponente y después resolver, como en este ejemplo:

$$\boxed{\log_7 \frac{1}{7} = \log_7(7^{-1}) = (-1)\cancel{\log_7} 7 = \text{-1}}$$

11. Resuelve estos logaritmos:

a) $\log_3 \frac{1}{3}$
b) $\log_2 \frac{1}{2}$
c) $\log \frac{1}{10}$
d) $\log_{17} \frac{1}{17}$
e) $\log_{43} \frac{1}{43}$
f) $\ln \frac{1}{e}$
g) $\log_7 \frac{1}{7^2}$
h) $\log_4 \frac{1}{4^3}$
i) $\log_2 \frac{1}{2^6}$
j) $\log_{93} \frac{1}{93^{17}}$
k) $\ln \frac{1}{e^6}$
l) $\log_6 \sqrt{6}$
m) $\log \sqrt{10}$
n) $\log_2 \sqrt[3]{2}$
o) $\log \sqrt{10^3}$
p) $\ln \sqrt{e^5}$
q) $\log_4 \sqrt[3]{4}$
r) $\log \sqrt[5]{11^3}$
s) $\log_2 \sqrt[7]{2^4}$
t) $\ln \sqrt[3]{e^5}$
u) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$
v) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$
w) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
x) $\log_7 \frac{1}{\sqrt[5]{7}^{2}}$
y) $\log \frac{1}{\sqrt[9]{10}^{7}}$
z) $\ln \frac{1}{\sqrt[5]{e}^{2}}$
aa) $\log_3 \sqrt[7]{3^{-4}}$
bb) $\log_5 \sqrt[4]{5^{-3}}$
cc) $\log \sqrt{10^{-3}}$
dd) $\ln \sqrt[5]{e^{-7}}$

Otro detalle entre operaciones, es que si al multiplicar se sumaba, al dividir, se restará. La explicación matemática tiene que ver con el exponente, se puede ver con este ejemplo:

$$\log \frac{7}{3} = \log\left(7 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log 7 + \log \frac{1}{3} = \log 7 + \log 3^{-1} = \log 7 + (-1)\log 3 = \log 7 - \log 3$$

Practiquemos esta igualdad en el sentido que suele ser más útil con el siguiente ejercicio

12. Resuelve sabiendo que

$$\boxed{\log 20 - \log 4 = \log(20:4)}$$

k) $\log_{10}(20) - \log_{10}(2) = \log_{10}(\square\square:\square) = \log_{10}(\square\square) = \square$
l) $\log_{10}(7) - \log_{10}(7) = \log_{10}(\square:\square) = \log_{10}(\square\square\square) = \square$
m) $\log_{10}(50) - \log_{10}(5) = \log_{10}(\square\square:\square\square) = \log_{10}(\square\square\square) = \square$
n) $\log_{10}(200) - \log_{10}(2) = \log_{10}(\square\square\square:\square) = \log_{10}(\square\square\square) = \square$
o) $\log_6(18) - \log_6(3) = \log_6(\square\square:\square) = \log_6(\square) = \square$
p) $\log_6(12) - \log_6(2) = \log_6(\square\square:\square) = \log_6(\square) = \square$
q) $\log_6(24) - \log_6(4) = \log_6(\square\square:\square) = \log_6(\square) = \square$
r) $\log_8(16) - \log_8(2) = \log_8(\square\square:\square) = \log_8(\square) = \square$
s) $\log_8(48) - \log_8(6) = \log_8(\square\square:\square) = \log_8(\square) = \square$
t) $\log_8(56) - \log_8(7) = \log_8(\square\square:\square) = \log_8(\square) = \square$

Historia del Logaritmo y el Número e

Los matemáticos que intervinieron en este descubrimiento fueron:

- Leonardo Bigollo, Fibonacci (1170-1250 Italia) Liber Abaci (1202)
- René Descartes (1596-1650 Francia-Suecia)
- John Napier (1550-1617 Inglaterra) Mirifici logarithmorum (1614)
- Edward Wright (1561-1615 Inglaterra) A description … of logarithmes (1616)
- Henry Briggs (1561-1631 Inglaterra) Arithmetica logarithmica (1624)
- William Oughtred (1574-1660 Inglaterra) Clavis Mathematicae (1631)
- René Descartes (1596-1650 Francia-Suecia)
- Isaac Newton (1642-1727 Inglaterra)
- Roger Cotes (1682-1716 Inglaterra) Philosophical Transactions (1714)
- Leonhard Paul Eluer (1707-1783 Suiza-Rus) Mechanica (1736)

Nos encontramos en el contexto histórico matemático de que los números tal y como los conocemos hoy (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) no existía, se usaban los conocidos como números romanos (I,V,X,L,C,D,M) pues datan de esa época, y los actuales se llamaban números arábigos, pues se introdujeron en Europa desde el norte de áfrica. Este cambio ocurrió en 1202 cuando Fibonacci los introdujo en Italia, al conocerlos en sus tratos comerciales con la actual Argelia, pues transportaba mercancías en barco.

Hasta 1448 no empezaron a verse en Inglaterra, en la iglesia de Braye. Fue cuestión de tiempo que al popularizarse, se encontraran dificultades para multiplicar grandes números. La necesidad de aumentar la velocidad de estas multiplicaciones no es un hecho aislado de un matemático sentado en una silla.

En 1585 Inglaterra y España se declararon la guerra, siendo reyes Isabel I de Inglaterra y Felipe II de España. La guerra empezó después de que Inglaterra ayudara a los Países Bajos a independizarse ya que era una colonia española, a que la anexión de Portugal a España en 1580 no se mantuviera y los piratas ingleses (los corsarios) se dedicaban a atacar a los barcos que transportaban bienes a las colonias de américa para quedarse con los recursos que transportaban.

Detrás de todos estos intereses se encontraban también intereses religiosos. Isabel I era protestante, y Felipe II católico, esto significaba que Felipe quería poner a otro rey que fuera católico en Inglaterra, no por el hecho de que las creencias entre católicos y protestantes fueran abismales, sino porque así gobernaba un familiar suyo, con el que poder hacer tratos, en vez de negociar con una reina que tenía sus propios intereses, que por sus actos se mostraban contrarios a los de España. De forma análoga, a Isabel le interesaba poner un rey protestante en España por los mismos motivos, así empezó una guerra, que escondía una lucha de poder detrás, como en todas las guerras.

Esta guerra duró hasta 1604, en esa época, la forma de combatir con una isla, era obviamente, en barco. Donde se perdieron muchas vidas, tanto de parte de los españoles en la derrota de la armada invencible (1588) como en la contra-armada inglesa (1589). Finalizó cuando ambos reyes abdicaron en sus sucesores, siendo Jacobo I de Inglaterra y Felipe III de España quienes firmaron el Tratado de Londres en 1604.

Paz que duró hasta que en 1618, cuando comenzó la guerra de los treinta años (hasta 1648), donde los protestantes se dividieron en luteranos y calvinistas, de forma que no solo luchaban por el poder de los reyes Inglaterra (luteranos) y España (católicos), sino que también se añadieron los alemanes (calvinistas) provocando la primera guerra europea que acabó involucrando a los demás países que estaban de uno u otro bando como a Francia, Suecia, Dinamarca e Italia.

En la paz entre estas dos guerras, las matemáticas se desarrollaron. Fruto de la necesidad que tenían los marineros ingleses que tenían grandes dificultades en hacer los cálculos del rumbo pues consistían en multiplicaciones de grandes números entre sí. Ya que sus conflictos con otros países se desarrollaban en barco, este era un asunto muy importante.

Ahí es donde entra John Napier, buscando una forma de hacer más eficiente las multiplicaciones. Desarrolló una tabla de multiplicar, y además diversos métodos de hacer multiplicaciones pequeñas con un invento que hoy se le denomina ábaco neperiano.

Pero su creación, como cualquier invento, no fue perfecta a la primera. Napier no usó la base e, de hecho usó varias bases para escribir sus tablas, fue su amigo Briggs el que usó la base 10 para la tabla. La base en la tabla de logaritmos nunca importó, pues el gran invento era convertir los productos de grandes números, en sumas. El método era sencillo, y lo escribió Wright en inglés para que lo pudieran usar en Inglaterra (ya que los artículos matemáticos de la época se escribían en latín, el idioma internacional de Europa en la época, como hoy en día pasa con el inglés).

La tabla de logaritmos en base e fue añadida al final del libro de Wright, pero no fue obra suya, sino trabajo de otro matemático llamado Oughtred. Wright era un comunicador, un traductor que acercó este método revolucionario a los ingleses, en cuanto comprendió la utilidad de este descubrimiento. La idea era la siguiente, si queremos multiplicar dos números grandes, los buscaban en una tabla haciéndole el logaritmo y luego lo deshacían, escrito con matemáticas actuales sería:

$$24154952 \cdot 1318815734 = e^{17} \cdot e^{21} = e^{17+21} = e^{38} = 31855931757113756$$

Que como en aquella época no existían calculadoras, todo esto se podía hacer con el libro de Wright "a description of the admirable table of logarithms", que significa, "*una descripción de la estupenda tabla de logaritmos*".

Esta tabla usando la notación actual es de esta forma:

$e^{\square}$	Resultado
…	…
16	8886110
17	24154953
18	656599969
19	178482301
20	485165195
21	1318815734
…	…
38	31855931757113756
…	…

El hecho histórico es que no existía la notación de exponente, como la que usamos hoy en día, fue introducida por Descartes años después, y en Francia, y la primera vez que se usó en Inglaterra fue por Newton.

100 años después, cuando esa información llegó a manos de Euler, a la vez que la fórmula de cotes que decía que

$$i x = \ln(\cos x + i \sin x)$$

Euler le dio forma al número e, llamándolo inicialmente c según se piensa en honor a cotes, encontrando 23 dígitos de la constante y usándola en sus fórmulas. Fue en sus siguientes publicaciones fue cuando le cambió la letra a e, y se popularizó esa forma de llamarla ya que sus grandes avances hicieron que muchos matemáticos posteriores aprendieran de él y usaran sus mismas letras para continuar con las investigaciones que dejó abiertas.

Siendo Euler el que popularizó de esta forma la notación de Oughtred, que fue quien escribió π, cos, sin y el símbolo de multiplicar y de dividir × : entre otros. Dejándonos esta fórmula:

$$e^{a+bi} = e^{a}(\cos b + i \sin b)$$

La importancia de Euler no fue solo fijar este número, sino también inventar a partir del desarrollo de Taylor de la exponencial, la forma de calcular el valor de e elevado a cualquier número como suma de fracciones.

Ya que

$$e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Se puede aproximar sumando las primeras fracciones para cualquier x.

Hoy en día la tabla de logaritmos sigue presente y está incluida en todas las calculadoras, que las usan para el cálculo de logaritmos y exponenciales en esta base.