Límites

Introducción

El concepto de límite nace con el método exhaustivo en Grecia (Antifonte 430 a.C) que buscaba aproximar el área de un círculo a partir de áreas de polígonos regulares que cada vez tenían más lados. La notación y el manejo que le damos hoy es un avance sobre la explicación del uso de las cantidades infinitesimales que usaban Newton y Lebiniz en sus primeros pasos para desarrollar las derivadas (previsiones) e integrales (cálculo de áreas difíciles).

Fue Bolzano (en 1817) cuando introduzco la técnica épsilón-delta. La idea de Bolzano fue buena, porque había poca rigurosidad con qué era un infinitesimal, y él llamó a las cantidades insignificantes ε (épsilon) y a las cantidades enormes M. Relacionándolas respecto de una circunstancia que ocurre en los problemas físicos, y no en los matemáticos.

Si planteamos un problema con euros, se puede considerar una cantidad insignificante 0,1 céntimos. Es una cantidad que, si sobra en un banco, en principio nosotros como usuarios no nos aporta nada, aunque pueda que sí para el banco que con 1.000.000 de cuentas así gane 1.000€. Podemos pensar que hay cantidades insignificantes distintas, como 0,05 céntimos ó 0,001 céntimo, que tienen orden. En matemáticas siguen siendo números, y siguen siendo válidos, pero para el problema en sí es algo que no podría pagarse a nadie una cantidad tan pequeña.

La cantidad enorme, se puede alcanzar fácilmente añadiendo ceros. Si en 2015 había en Europa aproximadamente 750 millones de personas, si suponemos que con suerte cada persona incluyendo a los niños, tienen ahorrado unos 10.000€, podemos hacer una estimación de que no hay más de 7.5 billones de euros en circulación. 7.5 billones es un número para las matemáticas, que tiene muchísimos números por encima, como 8 billones, 1 trillón, 2 cuatrillones. Pero es enorme, porque una única persona nunca podría tener todos los euros que existen en Europa.

Esta cantidad insignificante y esta cantidad enorme aparece en infinidad de problemas físicos, en donde podemos encontrar un número que es ridículamente pequeño, y otro exageradamente grande. Con esta intención se trata de un límite. Pero como matemático, se generaliza usando una fórmula tal que así:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{def}{\iff} [\ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ : (0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\ )]$$

Traducido para que lo entendamos, definimos que el límite de una función f(x) en el punto a toma el valor L, si para el valor insignificante que queramos ε, sin importar del problema físico en el que nos encontremos, de forma que este resultado nos funcione en cualquiera de las circunstancias que tengamos, podemos encontrar otra distancia insignificante entre los valores δ, que variará en función del valor de épsilon, tal que, si nos acercamos al punto a sin tocarlo a la distancia que hemos escogido, el error que se comete entre la aproximación por estos valores y el valor final L, es un error insignificante.

Análogamente lo podemos escribir para infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \overset{def}{\iff} [\ \forall\varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) > 0\ : (x > M\ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\ )]$$

Diremos que el límite de una función cuando toma valores enormes ($+\infty$) converge al punto L, si para el error insignificante ε que no nos importa cometer, podemos encontrar un valor enorme M a partir del cual el error siempre sea insignificante.

Indeterminaciones

La importancia de los límites no viene en su definición, sino en su aplicación. Aplicar un límite a una función "buena" no nos va a generar ningún problema, va a ser simplemente sustituir. La dificultad viene cuando nos encontramos con una operación que nos saca de los valores reales, generalmente dando infinito, es lo que llamamos indeterminaciones.

Todas las indeterminaciones tienen algún paso sencillo que las resuelve, lo difícil reside en que hay mucha variedad de tipos, y se tiende a confundir unas con otras, vamos a organizarlos en un esquema para evitar que eso pase, clasificándolas por tipos.

Órdenes de infinito

Cuando comparamos funciones entre sí hay funciones que crecen más rápido que otras. Para comparar quien toma valores mayores más rápido, comparamos restando funciones entre sí, para intentar transmitir quienes son las más lentas tomando valores y cuales las más rápidas:

$$\lim_{x\to+\infty} \log_{10} x - 100 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} ln\, x - \log_{10} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 x - ln\, x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x} - \log_2 x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2^x - x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^x - 2^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 10^x - e^x = +\infty$$

Tener este orden en mente nos hará falta para las indeterminaciones.

Indeterminación Tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las técnicas de resolver este tipo de indeterminaciones es coger los elementos con mayor grado del numerador y del denominador

Con polinomios

1) Si el denominador tiene mayor grado, dará cero
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^4 - x^2} = \frac{\infty}{\infty}(indet.) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

2) Si tienen el mismo grado, dará un número distinto de cero
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x}{5x^3 + 1} = \frac{\infty}{\infty}(indet.) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{5x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

3) Si el numerador tiene mayor grado, dará más o menos infinito
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{1 - x} = \frac{\infty}{\infty}(indet.) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-1} = \frac{2\infty}{-1} = -\infty$$

Con raíces

Hay que coger los elementos mayores, pero con raíces puede que haya varios en cada sitio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{\infty}{\infty}(indet.) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - \sqrt{x^2}}{\sqrt{4x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - x}{2x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

Con funciones transcendentes

Cuando mezclamos funciones transcendentes, como logaritmos y exponenciales, importará el orden de infinito, importando más quien esté arriba que abajo. También se puede resolver haciendo L'Hôpital, pero eso se deja para otro tipo más difícil de resolver

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 x}{x} = \frac{\infty}{\infty}(indet.) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=\frac{\infty}{\infty}(indet.)=\frac{1}{\infty}=0$$

Indeterminación Tipo $\infty-\infty$

Con raíces

Cuando se restan elementos del mismo orden, se tiene que multiplicar por el conjugado para resolver, de forma que nos aprovechemos de la identidad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, que con raíces pasa $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+x^2+x}-\sqrt{x^4-x^2+3}=\infty-\infty(indet)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+x}-\sqrt{x^4-x^2+3}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^4+x^2+x}+\sqrt{x^4-x^2+3}}{\sqrt{x^4+x^2+x}+\sqrt{x^4-x^2+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x-(x^4-x^2+3)}{\sqrt{x^4+x^2+x}+\sqrt{x^4-x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-3}{\sqrt{x^4-x^2+x}+\sqrt{x^4+2x^2+3}}=\frac{\infty}{\infty}(indet)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

Indeterminación Tipo $\mathbf{1}^{\infty}$

Cuando nos encontramos con un límite de este tipo, tenemos que hacer una transformación en la que deberíamos de recordar que $f^g=e^{\ln(f^g)}=e^{g\,lnf}$ entonces, podemos aproximar por el polinomio de Taylor el logaritmo ya que $\lim_{x\to1}\ln(\mathrm{x})=\lim_{x\to1}\mathrm{x}-1$. Todo esto mezclado nos lleva a la "regla del zapato" que es mezclarlo todo, quedando:

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{f(x)}^{g(x)}=1^{\infty}(indet)=e^{\lim_{x\to+\infty}\mathrm{g(x)}\,(f(x)-1)}$$

Resolvamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2-x}=1^{\infty}(indet)=e^{\lim_{x\to+\infty}(2-\mathrm{x})\left(\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)}=(*)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2-\mathrm{x})\left(\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}(2-\mathrm{x})\left(\frac{2x-1}{2x+3}-\frac{2x+3}{2x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}(2-\mathrm{x})\frac{-4}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8+4x}{2x+3}$$
$$=\frac{\infty}{\infty}(indet)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=\frac{4}{2}=2$$

Entonces, la solución es:

$$(*)=e^2$$

Indeterminación Tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

El teorema del factor nos dice que, si al sustituir la "x" por un número el polinomio da cero, entonces es que ese valor es una raíz del polinomio, y podremos hacer Ruffini para factorizarlo y simplificar.

Con polinomios

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{2x^2-6x+4}=\frac{0}{0}(indet.)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(2x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+4}{2x-2}=\frac{12}{2}=6$$

Con 1 raíz

Se hace el conjugado de la raíz, y le parte que no afecta a la simplificación se calcula

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{0}{0}(indet.)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}=$$
$$=\left(\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+3}+2\right)\left(\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+3-2^2}\right)=4\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}(indet.)=4\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$$
$$=4\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)}=4\frac{1}{2}=2$$

Con 2 raíces

Se hace dos conjugados, y la parte que no afecta a la resolución del límite se resuelve y se continúa.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+2x+6}}=\frac{0}{0}(indet.)=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+2x+6}}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2+2x+6}}{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2+2x+6}}=$$
$$=\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2+2x+6}}{\sqrt{x+3}+2}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1}\frac{x+3-2^2}{x^2+8-(x^2+2x+6)}\right)=\frac{6}{4}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{-2x+2}=\frac{0}{0}(indet.)=$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{-2(x-1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{2}=\frac{-3}{4}$$

Funciones a trozos

Para que una función sea continua tiene que cumplir 3 condiciones. La primera es que la función exista en el punto, el límite exista, y que los dos valores sean iguales.

Con desigualdades

Calcula k para que la función sea continua en x=0

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-1} & x\le 0\\ \sqrt{x+k} & x>0\end{cases}$$

1) La función en cero vale $f(0)=\frac{x-2}{x-1}=\frac{0-2}{0-1}=2$ es un número real, entonces existe

2) ¿Existe el límite?

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-2}{x-1} & = & \dfrac{0-2}{0-1} & = & 2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+k} & = & \sqrt{0+k} & = & \sqrt{k}\end{cases}$$

Para que el límite exista, los límites laterales tienen que ser iguales $2=\sqrt{k}$; $k=4$.

3) ¿Son iguales? $f(0)=2=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ entonces es continua.

Con "distintos de"

Calcula k para que la función sea continua en x=1

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} & x\neq 1\\ k & x=1\end{cases}$$

1) La función en cero vale $f(1)=k$ es un número real, entonces existe

2) ¿Existe el límite?

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\frac{0}{0}(indet)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+3}=\frac{1+2}{1+3}=\frac{3}{4}$$

Sí existe

3) ¿Son iguales? $f(0) = k = \frac{3}{4} = \lim_{x \to 0} f(x)$, si k=3/4 entonces la función es continua.

Tipo k/0

Esta indeterminación busca saber por dónde va a escaparse la función por la asíntota vertical, si por arriba o por abajo.

Divisor de primer grado

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0}(indet.) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1} & = & \frac{3}{0^-} & = & -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} & = & \frac{3}{0^+} & = & +\infty \end{cases}$$

Raíz doble

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{0}(indet.) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{(x-1)^2} & = & \frac{3}{(0^-)^2} & = & +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{(x-1)^2} & = & \frac{3}{(0^+)^2} & = & +\infty \end{cases}$$

Divisor de mayor grado

Primero hay que factorizar porque hay que tener en cuenta todos los signos del divisor

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2-4x+3} = \frac{3}{0}(indet.) = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} = \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} & = & \frac{3}{0^-(-2)} & = & +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} & = & \frac{3}{0^+(-2)} & = & -\infty \end{cases}$$

Asíntotas

Con los límites podemos encontrar asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las funciones que cumplan las siguientes características:

Asíntotas verticales

Una función tiene una asíntota vertical cuando la función toma el valor infinito, y esto ocurre en dos situaciones, al dividir por cero, o al hacer el logaritmo de cero.

Si por ejemplo tenemos una función $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, tendrá una asíntota vertical cuando $x - 1 = 0$, de forma que al despejarlo tenemos que para $x = 1$ tiene una asíntota vertical, y como la función vale infinito en ese punto, se dice que el dominio de esta función son todos los valores reales que no sean 1.

El estudio de si crece o decrece la función antes y después de la asíntota se resuelve con el límite del ejercicio anterior.

Para el logaritmo es un poco más difícil, ya que el logaritmo de un número negativo da un número complejo, solo podemos hacerlo por un lado, y por eso el límite se hace lateral y queda:

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$$

Entonces decimos que tiene una asíntota vertical en $x = 0$

Asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales se estudian haciendo el límite en más y menos infinito. Por suerte en los polinomios los límites por un lado y por otro son iguales, sólo en las exponenciales tienen un asíntota por un solo lado.

SI el límite cuando x tiende a más infinito da un número, se dirá que tiene una asíntota horizontal en dicho número. Normalmente son de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, se despeja la indeterminación y da un número.

En el caso especial de las exponenciales, tenemos que

$$\lim_{x\to -\infty} 2^{\mathrm{x}} = 0$$

Entonces decimos que tiene una asíntota horizontal en $y = 0$

Asíntotas oblicuas

Cuando al resolver un límite en más infinito obtenemos un polinomio de grado 1, normalmente en un cociente entre dos polinomios con el grado de numerador uno más que el de denominador, tendrá una asíntota oblicua.

Para averiguar la ecuación de la asíntota oblicua, que será de la forma y=mx+n, tenemos que resolver estos dos límites:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}}, \quad n = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{f(x) - mx}$$

Por ejemplo para $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{1-x}$, como hemos resuelto anteriormente, no tiene asíntota horizontal porque el límite en más infinito es menos infinito, y el grado del numerador es uno mayor al denominador, por eso sabemos que tendrá oblicua y buscamos su m y su n.

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{x(1-x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{x-x^2} = \frac{\infty}{\infty}(indet.) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = \lim_{x\to -\infty} -2 = -2$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{f(x) - mx} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{1-x} - (-2x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{1-x} + \frac{2x-x^2}{1-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x-1}{1-x}$$
$$= \frac{\infty}{\infty}(indet.) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{-x} = \lim_{x\to -\infty} -3 = -3$$

Entonces podemos decir, que la función tiene una asíntota oblicua en $\mathrm{y = -2x - 3}$.

L'Hôpital y Taylor

Cuando usamos funciones transcendentales, tenemos dos recursos, derivar arriba y abajo o sustituir por un polinomio equivalente. Los polinomios equivalentes a las transcendentes se calculan con el polinomio de Tyalor de primeros grados, estos son:

$$\lim_{x\to 0} sen\, x = \lim_{x\to 0} x$$

$$\lim_{x\to 0} cos\, x = \lim_{x\to 0} 1 - x^2$$

$$\lim_{x\to 0} tam\, x = \lim_{x\to 0} 1 + x$$

$$\lim_{x\to 0} ln\,(x+1) = \lim_{x\to 0} x - x^2$$

Sin embargo, con L'Hôpital, podemos derivar:

$$\lim_{x\to c} \frac{f}{g} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to c} \frac{f'}{g'}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f}{g} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to c} \frac{f'}{g'}$$