Tema 5: Ecuaciones de 1^{er} y 2^{o} grado

1. Introducción y Repaso de ecuaciones

Trabajos voluntarios para entregar: ¿Quién fue Diofanto?, ¿Quién fue Al-Jwārizmī?

Regla de la suma

Un término que está sumando puede pasar restando

$$x+3=5$$
$$x=5-3$$
$$x=2$$

Regla de la resta

Un término que está restando puede pasar sumando

$$x-2=4$$
$$x=4+2$$
$$x=6$$

⚠ **¡¡¡ Cuidado!!!!** Ejercicio trampa. ¿Cuánto es?

$$2x=x$$

Regla de la multiplicación

Cuando tengo igualados sólo dos términos, el coeficiente que está multiplicando pasa dividiendo

$$3x=12$$
$$x=\frac{12}{3}$$
$$x=4$$

Regla de la división

Si tenemos un número dividiendo, podemos multiplicar por este en ambos lados

$$\frac{x}{2}=5$$
$$2\bullet\frac{x}{2}=2\bullet 5$$
$$x=10$$

⚠ **¡¡¡ Cuidado!!!!** Ejercicio trampa. ¿Cuánto es?

$$30x=5$$

Regla del cruce

Se le puede dar la vuelta a la igualdad y sigue siendo verdad

$$3=x$$
$$x=3$$

Regla del -x

Si la x está negativa se multiplica todo por (-1) para hacerla positiva

$$-x=5$$
$$(-1)(-x)=(-1)5$$
$$x=-5$$

Ejercicios

Página 137, Ejercicios 1 y 2

Página 138, Ejercicios de Práctica del 1 al 15

Página 148, Ejercicio 2

2. Resolución de ecuaciones sin denominadores

Doble cruce

Cuando tenemos números y monomios a otro dejamos los monomios a la izquierda y los números a la derecha.

$$5x-7=4x+4$$
$$5x-4x=4+7$$
$$x=11$$

Agrupar

Antes de enviar a un lado u a otro los números y monomios, agrupamos lo que se pueda, así evitamos que se nos escape un signo.

$$2x+3x-4x=7+9-2$$
$$x=14$$

De esta forma hacer el doble cruce es más fácil

$$2+3-4+2x=5x-7x+3x-1$$
$$1+2x=x-1$$
$$2x-x=-1-1$$
$$x=-2$$

Resolución de ecuaciones sin denominadores

Veamos con este ejemplo los pasos. Resuelve:

$$3-4(2x-1)=2x-5(-5+4x)$$

1º Paréntesis (cuidado con los signos menos)

$$1-8x+4=2x+25-20x$$

2º Agrupamos

$$-8x+5=25-18x$$

3º Doble cruce y sumamos

$$18x-8x=25-5$$

$$10x=20$$

4º Regla de la multiplicación, o del -x

$$x=\frac{20}{10}$$

5º Simplificamos, recuadramos y FIN

$$\boxed{x=2}$$

Ejercicios

Página 138, Práctica del 16 al 30

Página 139, Práctica del 31 al 54

Página 148, Ejercicio 3

Página 153, Ejercicio 2

3. Resolución de ecuaciones con denominadores

Mínimo Común Múltiplo (mcm)

Cuando hay fracciones necesitamos calcular el Mínimo Común Múltiplo de todos los denominadores.

El mínimo común múltiplo de varios números es coger de los comunes, los que tienen mayor exponente, y también multiplicar por los no comunes

$$mcm(4,6,9)$$
$$\begin{array}{lcl} 4 & = & 2^2 \\ 6 & = & 2\cdot 3 \\ 9 & = & \quad 3^2 \end{array} \qquad mcm(4,6,9)=2^2\cdot 3^2=4\cdot 9=36$$

Producto de el mcm por fracciones

Como el mcm es también múltiplo del denominador, cuando se multiplica por una fracción PRIMERO se DIVIDE y después se multiplica. Como se indica:

$$36 \bullet \frac{3}{4} = \frac{36}{4} \bullet 3 = 9 \bullet 3 = 27 \qquad 36 \bullet \frac{5}{6} = \frac{36}{6} \bullet 5 = 6 \bullet 5 = 30 \qquad 36 \bullet \frac{2}{9} = \frac{36}{9} \bullet 5 = 4 \bullet 5 = 20$$

Estas cuentas se espera que se puedan hacer de cabeza, no se escriben, y los ejercicios quedan resueltos así:

$$36\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{2}{9}\right)=27+30+20=77$$

Combo con fracciones

Se van a mezclar dos reglas a la vez con las fracciones,

Primero la propiedad **asociativa** de la multiplicación:

$$2 \bullet 3 \bullet 4 = 6 \bullet 4 = 24$$

Segundo la propiedad **distributiva**

$$2(3+4) = 6+8 = 14$$

Y recordando que primero hay que hacer los paréntesis, y usar la regla anterior, tenemos:

$$-4 \bullet \frac{3(x-5)}{2} = -4 \bullet \frac{3x-15}{2} = -\frac{4}{2} \bullet (3x-15) = -2(3x-15) = -6x+30$$

⚠ **¡¡¡ Cuidado!!!!** Ejercicio trampa. Simplifica

$$-4 \bullet \frac{-3(-x+5)}{-2}$$

Resolución de ecuaciones con denominadores

Veamos con este ejemplo los pasos. Resuelve:

$$\frac{5(x-2)}{6} - \frac{3(x-5)}{4} = \frac{7(x-1)}{12}$$

1º Quitar los paréntesis que se puedan quitar

$$\frac{5x-10}{6} - \frac{3x-15}{4} = \frac{7x-7}{12}$$

2º Encontrar el mcm de los denominadores

$$mcm(4,6,12)$$
$$4 = 2^2$$
$$6 = 2 \bullet 3$$
$$12 = 2^2 \bullet 3$$
$$mcm(4,6,12) = 2^2 \bullet 3 = 4 \bullet 3 = 12$$

3º Multiplicar ambos miembros de la igualdad por el mcm, y operamos DIVIDIENDO PRIMERO:

$$12\left(\frac{5x-7}{6} - \frac{3x-5}{4}\right) = 12\left(\frac{7x-9}{12}\right)$$

$$\frac{12}{6}(5x-7) - \frac{12}{4}(3x-5) = \frac{12}{12}(7x-9)$$

$$2(5x-7) - 3(3x-5) = 1(7x-9)$$

$$10x-14-9x+15 = 7x-9$$

4º Agrupamos

$$x+1=7x-9$$

5º Doble cruce y sumamos

$$x-7x=-9-1$$

$$-8x=-10$$

6º Regla de la multiplicación, o del -x

$$x=\frac{-10}{-8}$$

7º Simplificamos, recuadramos y FIN

$$\boxed{x=\frac{5}{4}}$$

Ejercicios

Página 141, Ejercicios del 1 al 4

Página 138, Ejercicios de Práctica 1 a 15

Página 148, Ejercicios del 4 al 7

Página 153, Ejercicios 3 y 4

4. Ecuaciones de segundo grado incompletas

Multiplicaciones que dan cero

Observemos estas cuatro multiplicaciones:

$$3\bullet 0=0$$
$$0\bullet 2=0$$
$$0\bullet 0=0$$
$$3\bullet 2=6$$

Nos ayuda entender que esta propiedad aunque no la demostremos:

Dos números que se multiplican dan cero solo si alguno es cero.

Lo que nos lleva a la siguiente forma de despejar ecuaciones en las que dos binomios se multiplican entre sí. Veámoslo con este ejemplo. Encuentra las posibles soluciones de esta ecuación:

$$(x+2)(x-3)=0$$

Son dos binomios que dan cero, se cumplirá la ecuación cuando alguno de ellos sea cero:

$$\left\{\begin{matrix} x+2=0 \\ x-3=0 \end{matrix}\right\}_{ó} \; ; \; \left\{\begin{matrix} x=-2 \\ x=3 \end{matrix}\right\}_{ó}$$

Para que se cumpla la ecuación la x tiene que tomar el valor -2 o el valor 3

$$\boxed{x=-2,\ 3}$$

Ecuación de segundo grado sin c: $ax^2+bx=0$

Entendamos cómo se resuelve con el siguiente ejemplo. Encuentra las soluciones de:

$$3x^2+6x-2=x^2-2+3x$$

1º Como no tiene ni fracciones ni se puede agrupar nada, enviamos todo a un lado, preferiblemente el lado izquierdo, quedando un cero a la derecha ya que todo se pasa restando, intentando mantener el orden de mayor grado a menor.

$$3x^2-x^2+6x-3x-2+2=0$$

$$2x^2+3x=0$$

2º **Sacar factor común** (en este tipo de ecuación siempre se puede sacar al menos una x)

$$x(2x+3)=0$$

3º Dos elementos que se multiplican son cero si alguno es cero

$$\left\{\begin{matrix} x=0 \\ 2x+3=0 \end{matrix}\right\}_{ó} \; ; \; \left\{\begin{matrix} x=0 \\ 2x=-3 \end{matrix}\right\}_{ó} \; ; \; \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x=\frac{-3}{2} \end{matrix}\right\}_{ó}$$

4º Expresamos de forma que podamos resaltarlo y FIN

$$\boxed{x=0,-\frac{3}{2}}$$

⚠ **¡¡¡ Cuidado!!!!** Ejercicio trampa. Calcula los valores de x para los que se cumple esta ecuación

$$x^2+x=0$$

⚠ **¡¡¡ Cuidado!!!!** Ejercicio con varias formas de solucionarlo. Calcula los valores de x para los que se cumple esta ecuación

$$2x^2+4x=0$$

¿¿¿ Pregunta ??? ¿Siempre sale como solución cero en este tipo de ecuaciones?

Raíces cuadradas de incógnitas

Recordamos las raíces cuadradas de los primeros números, que hay que memorizar de nuevo para este tema:

$$\sqrt{0}=0 \; ; \; \sqrt{1}=1 \; ; \; \sqrt{4}=2 \; ; \; \sqrt{9}=3 \; ; \; \sqrt{16}=4 \; ; \; \sqrt{25}=5 \; ; \; \sqrt{36}=6 \; ; \; \sqrt{49}=7 \; ; \; \sqrt{64}=8 \; ; \; \sqrt{81}=9$$

$$\sqrt{100}=10 \; ; \; \sqrt{121}=11 \; ; \; \sqrt{144}=12 \; ; \; \sqrt{169}=13 \; ; \; \sqrt{196}=14 \; ; \; \sqrt{225}=15 \; ; \; \sqrt{256}=16 \; ;$$

Observamos dos cosas, que estamos haciendo raíces de números positivos, porque para hacer la raíz de un número negativo nos daría un número complejo, que no toca aprender en este tema así que cuando hagamos las raíces de un número negativo lo dejaremos indicado como

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Se lee: "raíz de menos uno no es un número real"

Y también observamos que la raíz cuadrada de un número positivo, siempre nos da otro número positivo. Es por eso que vamos a plantearnos qué ocurre en este ejemplo trampa.

⚠ **¡¡¡ Cuidado!!!!** Ejercicio trampa. Calcula estas raíces

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt{2^2}$

c) $\sqrt{(-2)^2}$

Visto esto, necesitamos expresar que nuestras van a tener un valor positivo, es por eso que usamos el símbolo de valor absoluto, que nos convierte un número negativo en positivo, y los positivo los deja como son:

$$|-2|=2\ ;\ |2|=2$$

Así podemos entender esta fórmula que es muy importante:

$$\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$$

Ecuaciones fáciles con valor absoluto

Vamos a aprender a resolver los tipos más fáciles de ecuaciones de valor absoluto que nos harán falta para el siguiente tipo de ecuaciones de segundo grado. Veámoslo con el ejemplo:

$$|x|=2\ ;\ \left.\begin{cases} x=2 \\ -x=2 \end{cases}\right\}_{ó}\ ;\ \left.\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}\right\}_{ó}\ ;\ x=-2,2\ ;\ x=\pm 2$$

Se lee como: "Los posibles valores para los que el valor absoluto de x vale 2, son 2 y -2"

De forma que para nuestro nivel solo es necesario aprendernos estos dos pasos, porque no vamos a complicar estos ejercicios más en este curso:

$$\boxed{\begin{array}{c}|x|=2 \\ x=\pm 2\end{array}}$$

Ecuación de segundo grado sin b: ax² + c = 0

Veamos cómo se resuelve una ecuación de segundo grado de este tipo:

$$2x^2-18=0$$

1º Dejamos la x^2 en un lado y los números en otro

$$2x^2=18$$

2º Si se queda algún número multiplicando a x^2 se pasa dividiendo, y si se puede se simplifica

$$x^2=\frac{18}{2}$$

$$x^2=9$$

3º Si hace la raíz cuadrada en ambos lados, y se resuelve

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{9}$$

$$|x|=3$$

$$x=\pm 3$$

⚠ **¡¡¡ Cuidado!!!!** Ejercicio trampa. Calcula los valores de x para los que se cumple esta ecuación

$$256x^2-169=0$$

Ejercicios

Página 147, Ejercicios 1 y 2

Página 151, Ejercicio 38

Página 153, Ejercicio 5

5. Ecuaciones de segundo grado completas

Trabajos voluntarios para entregar: ¿Quién fue Brahmagupta?, ¿Quién fue Abū Kāmil? ¿Quién fue Sridhara?, ¿Quién fue Cardano?

Ecuación de segundo grado completa: $ax^2 + bx + c = 0$

La forma de enseñar cómo se resuelve esta ecuación, es aprendiéndose la fórmula general de segundo grado, que sale de despejar la ecuación general, es decir, de una ecuación de la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

Nos tenemos que aprender la fórmula de segundo grado

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Historia de la Ecuación de Segundo Grado

Brahmagupta en el 600 a.C. dio la fórmula para la raíz positiva (y solo consideraba raíces enteras), al-Khwarizmi 1 200 años después (800 d.C.) encontró las dos soluciones, pero seguía dando solo por válidas las soluciones de raíces enteras y positivas.

Abu Kamil (900 d.C.) fue el primero en aceptar las soluciones irracionales. Yang Hui (1250 d.C.) aceptó por primera vez las raíces negativas. Gerolamo Cardano (1545 Ars Magna) usó por primera vez los números complejos que nacían en estas ecuaciones de segundo grado para resolver las de tercer y cuarto grado.

Finalmente fue Carl Friedrich Gauss (1801 Disquisitiones arithmeticae) donde demostró que toda ecuación de segundo grado se puede factorizar como producto de dos polinomios lineales.

Demostración

Aunque la demostración no es necesaria entenderla ayuda a comprender cómo se llega de un sitio a otro.

$$\begin{gathered}
ax^2+bx+c=0\\
ax^2+bx=-c\\
4a^2x^2+4abx=-4ac\\
4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac\\
(2ax+b)^2=b^2-4ac\\
|2ax+b|=\sqrt{b^2-4ac}\\
2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}\\
2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\\
x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{gathered}$$

Ejercicios

Página 147, Ejercicios 3 y 4

Página 151, Ejercicios 39 y 40

Página 153, Ejercicio 6

6. Resolución de problemas de números

Los problemas que relacionan números en segundo de la ESO necesitan entender cómo representar estas afirmaciones:

a) Dos números consecutivos: x, x+1

b) Tres números consecutivos: x-1, x, x+1

c) Dos números pares consecutivos 2x, 2x+2

d) Dos números impares consecutivos 2x-1, 2x+1

Ejercicios

Página 142, Ejercicios del 1 al 4

Página 148, Ejercicios del 9 al 12

Página 149, Ejercicio 13

7. Resolución de problemas de Geometría (Rectángulos)

Los problemas que relacionan rectángulos en segundo de la ESO necesitan recordar las dos fórmulas:

a) El Perímetro de un cuadrado es P=2a+2b

b) El Área de un rectángulo es A = ba

Ejercicios

Página 144, Ejercicios 3 y 7

Página 150, Ejercicio 32

Página 151, Ejercicios 45 y 46